

◀	<i>Tartalom</i>	<i>Fogalmak</i>	<i>Törvények</i>	<i>Képletek</i>	<i>Lexikon</i>	▶
---	-----------------	-----------------	------------------	-----------------	----------------	---

## A váltakozó áram teljesítménye és munkája

Ha váltakozó feszültségű áramforráshoz kapcsolunk egy fogyasztót, akkor azon áram folyik, az áramforrás tehát látszólag munkát végez rajta. *A fogyasztóra kapcsolt feszültség effektív értékének és az effektív áramerősségnek a szorzatával értelmezett fizikai mennyiséget látszólagos teljesítménynek nevezünk.* A látszólagos teljesítmény jele  $P_{\text{látsz}}$ . Képlettel:

$$P_{\text{látsz}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}. \quad (1)$$

A látszólagos teljesítmény mértékegysége:

$$[P_{\text{látsz}}] = [U_{\text{eff}}] \cdot [I_{\text{eff}}] = \text{V} \cdot \text{A} = \text{W}.$$

A fogyasztó által hasznosított teljesítmény (hatásos teljesítmény) ettől azonban lényegesen is eltérhet. Ezt egy kondenzátorral kapcsolatban részletesen is megvizsgáljuk.

*A kapacitív ellenállás* című fejezetben láttuk, hogy a váltakozó feszültségre kapcsolt kondenzátornál a feszültség és az áramerősség pillanatnyi értéke ugyanabban a  $t$  időpontban:

$$U = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ).$$

A pillanatnyi teljesítmény:

$$P = U \cdot I = [U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)] \cdot [I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ)],$$

azaz

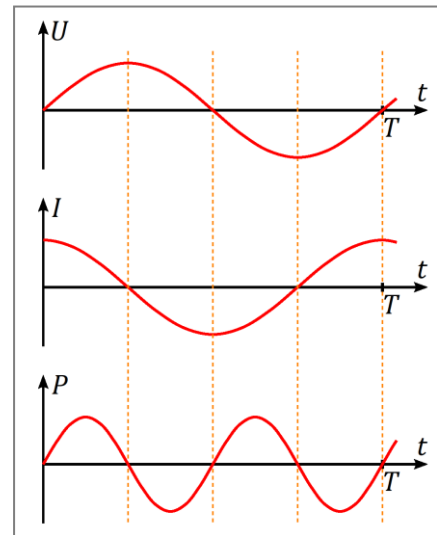
$$P = U_0 \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ). \quad (2)$$

Egy szögfüggvényekre vonatkozó azonosság segítségével ez a

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \quad (3)$$

alakra hozható. (Részletek a *Kiegészítésekben*.)

Ezek alapján az idő függvényeként ábrázoltuk a feszültséget, áramerősséget és a pillanatnyi teljesítményt. Látható, hogy bizonyos szakaszokon a feszültség és az áramerősség ugyanolyan előjelű. Itt a teljesítmény pozitív, tehát az áramforrás munkát végez a kondenzátoron. Emiatt a kondenzátor energiája nő; a kondenzátor éppen ezeken a szakaszokon töltődik fel. A közbeeső szakaszokon a feszültség és az áramerősség ellenkező előjelű. A pillanatnyi teljesítmény, és így az áramforrás kondenzátoron végzett munkája is negatív.



Ennek következtében a kondenzátor energiája csökken; a kondenzátor éppen ezeken a szakaszokon sül ki. *Az elektromos mező energiája* című fejezetben láttuk, hogy a  $C$  kapacitású,  $U$  feszültségre feltöltött kondenzátor energiája

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2.$$

Az áramforrás tehát a kezdetben „üres” kondenzátor *feltöltése során* (az 1. és 3. negyedben) ugyanekkorra munkát végez, azaz

$$W_1 = W_3 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2.$$

A feltöltött kondenzátor energiája a *kisülés közben* csökken, azaz az áramforrás munkája negatív lesz. A kondenzátor teljes kisülése közben (a 2. és 4. negyedben) végzett munka:

$$W_2 = W_4 = -\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2.$$

*A kondenzátoron így egy teljes periódus alatt végzett munka összesen nulla, mert*

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 - \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 - \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = 0.$$

Hasonló a helyzet, ha a periódusidőnél lényegesen hosszabb  $\Delta t$  időtartamot vizsgálunk. Ekkor minden egyes teljes periódusban nulla a kondenzátoron végzett munka. Legfeljebb az utolsó, töredék periódus miatt lehet egy kis eltérés a nulla értéktől. A teljes  $\Delta t$  időtartamra vonatkozó hatásos teljesítmény emiatt:

$$P_h = \frac{W}{\Delta t} = \frac{0}{\Delta t} = 0.$$

Eszerint a váltakozó feszültségre kapcsolt kondenzátor hatásos teljesítménye nulla:

$$P_h = 0.$$

A fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy a váltakozó feszültségre kapcsolt ideális (elhanyagolható ohmos ellenállású) tekercs hatásos teljesítménye nulla.

$$P_h = 0.$$

Mindezeket összevetve az (1) összefüggéssel, megállapítható hogy a látszólagos és hatásos teljesítmény eltérhet egymástól.

Láttuk, hogy a váltakozó feszültségre kapcsolt fogyasztónál az áram és a feszültség többnyire nincs szinkronban. Ilyen fogyasztónál a Kiegészítésekben látható módon igazolható: Ha a váltakozó feszültségre kapcsolt fogyasztónál a feszültség és áram közt  $\varphi$  fáziskülönbség van, akkor a hatásos teljesítménye:

$$P_h = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi. \quad (4)$$

A fáziskülönbség (fázisszög) koszinuszát ( $\cos \varphi$ ) teljesítménytényezőnek nevezzük.

Ennek alapján a következő táblázatban megadtuk a fázisszöget, a teljesítménytényezőt és a hatásos teljesítményre vonatkozó képletet ohmos ellenállásnál, tekercsnél, kondenzátornál, valamint a felsoroltak közé nem tartozó egyéb fogyasztónál.

FOGYASZTÓ	$\varphi$	$\cos \varphi$	$P_h$
Ohmos ellenállás	$0^\circ$	1	$U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$
Tekercs	$-90^\circ$	0	0
Kondenzátor	$90^\circ$	0	0
Egyéb	$0^\circ <  \varphi  < 90^\circ$	$0 < \cos \varphi < 1$	$0 < P_h < U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$

A táblázatból megállapítható: Ha a fogyasztó ohmos ellenállás, akkor a hatásos teljesítmény megegyezik a látszólagos teljesítménnyel, minden más esetben a hatásos teljesítmény kisebb, mint a látszólagos teljesítmény.

A váltakozó áram  $\Delta t$  idő alatt végzett látszólagos, illetve hatásos munkája a teljesítmény és az idő szorzataként számítható ki. Ennek megfelelően

$$P_{\text{látsz}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \Delta t, \quad \text{illetve} \quad P_h = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \Delta t \cdot \cos \varphi.$$

## Kiegészítés

1. A különféle elektromos eszközöknek általában több összetevője van (tekercs, kondenzátor, ellenállások, félvezető alkatrészek). Gyakran ezek nem is választhatók szét, egy motor vagy transzformátor tekercseitől nem lehet például elválasztani a tekercset alkotó huzal ohmos ellenállását. Az előző táblázat utolsó sora ilyen fogyasztókra vonatkozik.

2. Az  $U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin \varphi$  szorzat által meghatározott fizikai mennyiséget *meddő teljesítménynek* nevezzük. Jele  $P_m$ .

3. A kondenzátor pillanatnyi teljesítményét megadó (2) összefüggést átalakítva a pillanatnyi teljesítmény:

$$\begin{aligned} P &= U_0 \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) = U_0 \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) = \\ &= U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t), \end{aligned}$$

azaz

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t).$$

Ez pedig éppen az igazolandó (3) összefüggés.

4. A (4) összefüggés igazolásához kiindulásként írjuk fel a pillanatnyi teljesítményt:

$$\begin{aligned} P &= U \cdot I = [U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)] \cdot [I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)] = \\ &= U_0 \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi). \end{aligned}$$

Ezt a matematikából ismert  $2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$  összefüggés alapján átalakítva:

$$\begin{aligned} P &= U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot [\cos \varphi - \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)] = \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cdot [\cos \varphi - \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)] = \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot [\cos \varphi - \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)] = \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi - U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi). \end{aligned}$$

Eszerint a pillanatnyi teljesítmény:

$$P = \underbrace{U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi}_{P_{\text{áll}}} + \underbrace{[-U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)]}_{P_{\text{vált}}}$$

A jobb oldalon álló első tag *időben állandó*:

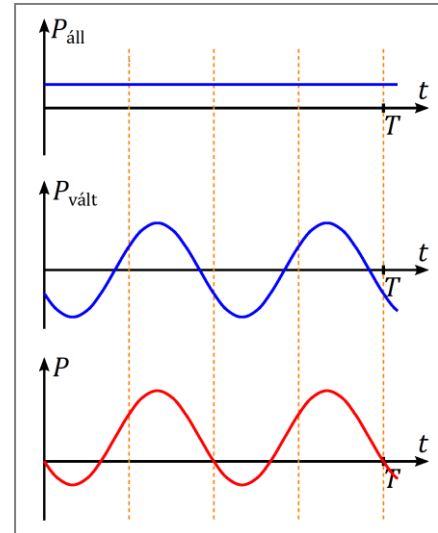
$$P_{\text{áll}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi.$$

A jobb oldalon álló második tag egy koszinuszfüggvény szerint *függ az időtől*:

$$P_{\text{vált}} = -U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi).$$

Ez a függvény hasonló a (3) összefüggéshez, abból egy  $t$  tengely menti eltolással előállítható. A (3) függvénnyel kapcsolatban megállapítottuk, hogy egy teljes periódusidő alatt az áramforrás által végzett munka nulla. Mivel a  $P_{\text{vált}}$  értékét megadó függvény ugyanilyen alakú, ezért *a periódusidő alatt az áramforrás által végzett munka itt is nulla, azaz*

$$W_{T,\text{vált}} = 0.$$



Hasonló a helyzet, ha a periódusidőnél lényegesen hosszabb  $\Delta t$  időtartamot vizsgálunk. Ekkor minden egyes teljes periódusban nulla a fogyasztón végzett munka. Legfeljebb az utolsó, töredék periódus miatt lehet egy kis eltérés a nulla értéktől, ezért

$$W_{\text{vált}} = 0.$$

A teljes  $\Delta t$  időtartamra vonatkozó hatásos teljesítmény emiatt:

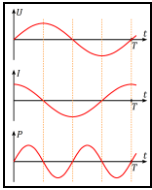
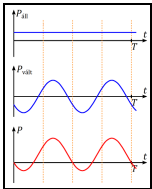
$$P_{\text{h}} = \frac{W_{\text{áll}} + W_{\text{vált}}}{\Delta t} = \frac{P_{\text{áll}} \cdot \Delta t + 0}{\Delta t} = P_{\text{áll}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi$$

azaz

$$P_{\text{h}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi.$$

Ez pedig éppen az bizonyítani kívánt (4) összefüggés.

## Képek jegyzéke

	<p><b><math>U(t)</math>, <math>I(t)</math> és <math>P(t)</math> grafikon váltakozó feszültségre kapcsolt kondenzátornál</b></p> <p>© <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0575.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0575.svg</a></p>
	<p><b><math>P_{\text{ell}}(t)</math>, <math>P_{\text{vált}}(t)</math> és <math>P(t)</math> grafikon váltakozó feszültségre kapcsolt fogyasztónál</b></p> <p>© <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0576.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0576.svg</a></p>

### Jelmagyarázat:

© **Jogvéde**tt anyag, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A **Wikimedia Commons**-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.