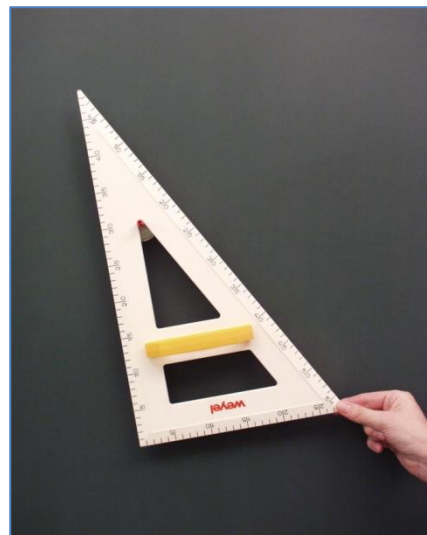


◀	<i>Tartalom</i>	<i>Fogalmak</i>	<i>Törvények</i>	<i>Képletek</i>	<i>Lexikon</i>	▶
---	-----------------	-----------------	------------------	-----------------	----------------	---

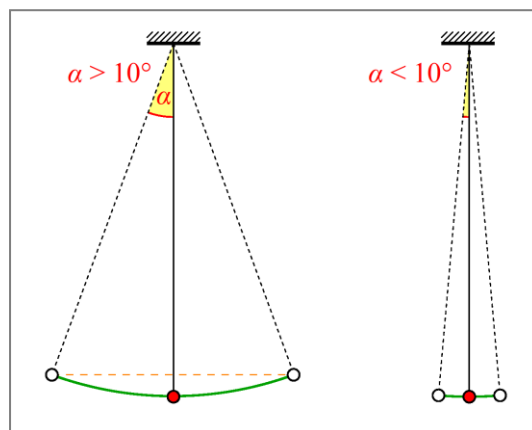
## Az inga

Ha a szegre akasztott vonalzót kissé kitérítjük, majd magára hagyjuk, akkor a vonalzó egy ideig ide-oda leng. Hasonló lengő mozgást végez a mennyezetről lelógó lámpa is, ha egyensúlyi helyzetéből kissé kitérítve magára hagyjuk. *A súlypontja fölötti pontjánál fogva felfüggesztett merev testet ingának nevezük.* Mivel az ilyen (úgynevezett fizikai) ingák mozgásának tárgyalása túl bonyolult, ezért a továbbiakban az ingák legegyszerűbb modelljével, a matematikai ingával foglalkozunk.



*Egy nyújthatatlan, elhanyagolhatóan kis tömegű fonalból és az arra felfüggesztett pontszerű testből álló ingát matematikai ingának nevezük.* A továbbiakban ingán általában mindig matematikai ingát értünk, az ettől történő eltérést külön jelezzük.

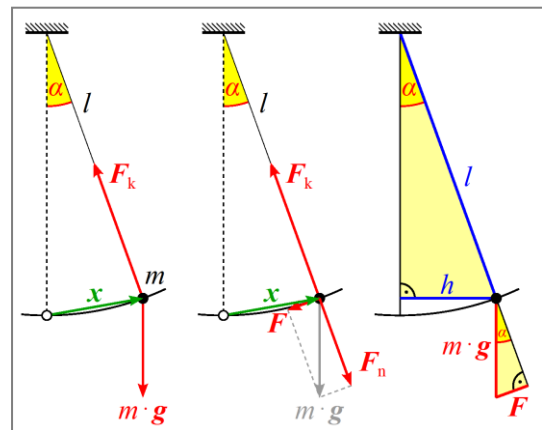
Ha egy ingát az egyensúlyi helyzetéből kitérítünk, majd kezdősebesség nélkül elengedjük, akkor a test egy függőleges síkban fekvő körpályán periodikus mozgást végez. Ha a lengések amplitúdója elég kicsi ( $10^\circ$ -nál kisebb), akkor a pálya görbülete elhanyagolható, és *ilyenkor a mozgás egy vízszintes pályán végbemenő rezgésnek tekinthető.*



A következőkben megvizsgáljuk, milyen mozgást végez a kis kitérésekkel lengő matematikai inga, és mely tényezőktől függ a lengésideje. Az ábrának megfelelően jelölje az inga hosszát  $l$ , a test tömegét  $m$  és az egyensúlyi helyzettől mért kitérést  $x$ ! A testre két erő hat, az  $m \cdot g$  nehézségi erő és a fonál által kifejtett  $F_k$  kötélereő. A nehézségi erőt két, egymásra merőleges irányú összetevőre ( $F$  és  $F_n$ ) bonthatjuk. A nehézségi erőnek a fonál irányába eső  $F_n$  összetevője, valamint az  $F_k$  kötélereő minden helyzetben merőleges a test sebességére, így a sebesség nagyságát ezek nem befolyásolják.

A testnek a sebesség irányába eső gyorsulását az  $F$  erő határozza meg. Ennek az erőnek a nagysága az ábra alapján határozható meg. A rajzon megjelölt két derékszögű háromszög hasonló, mert két szögük ( $\alpha$  és a derékszög) mindkét háromszögben ugyanakkora. Ezért a megfelelő oldalaik aránya is megegyezik:

$$\frac{F}{m \cdot g} = \frac{h}{l}.$$



Átrendezve:

$$F = \frac{m \cdot g}{l} \cdot h.$$

Kis kitéréseknél  $x \approx h$ , továbbá  $F$  és  $x$  gyakorlatilag vízszintesek. Az  $F$  és az  $x$  ellentétes irányát is figyelembe véve emiatt:

$$F = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot x. \tag{1}$$

Mindkét oldalt osztva a kitéréssel:

$$\frac{F}{x} = -\frac{m \cdot g}{l}.$$

Mivel egy adott ingánál a test tömege, a nehézségi gyorsulás és a fonál hossza a lengés közben nem változik, a jobb oldalon álló kifejezés állandó, tehát:

$$\frac{F}{x} = \text{állandó}.$$

Ezek szerint a kis amplitúdóval lengő matematikai ingánál a testre ható erő és a kitérés egyenesen arányos egymással, de irányuk ellentétes, így a mozgás harmonikus rezgőmozgás.

A rezgésidő az (1) képlet és az előző fejezetben kapott  $F = -m \cdot \omega^2 \cdot x$  összefüggés alapján határozható meg:

$$F = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot x,$$

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot x.$$

Ebből:

$$-\frac{m \cdot g}{l} \cdot x = -m \cdot \omega^2 \cdot x,$$

$$\frac{g}{l} = \omega^2.$$

A körfrekvenciát a rezgésidővel kifejezve:

$$\frac{g}{l} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2.$$

Átrendezve:

$$\frac{g}{l} = \frac{(2 \cdot \pi)^2}{T^2},$$

$$T^2 = (2 \cdot \pi)^2 \cdot \frac{l}{g},$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonva:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2}$$

A kapott összefüggés szerint a matematikai inga lengésideje kis amplitúdójú lengéseknél csak az inga hosszától és a nehézségi gyorsulástól függ.

## Példa

Mekkora a lengésideje az 1 méter hosszú matematikai ingának?

*Megoldás*

$$l = 1 \text{ m}$$

$$g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

---

$$T = ?$$

A lengésidőre vonatkozó (2) képlet alapján:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1 \text{ m}}{9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 2,0064 \text{ s.}$$

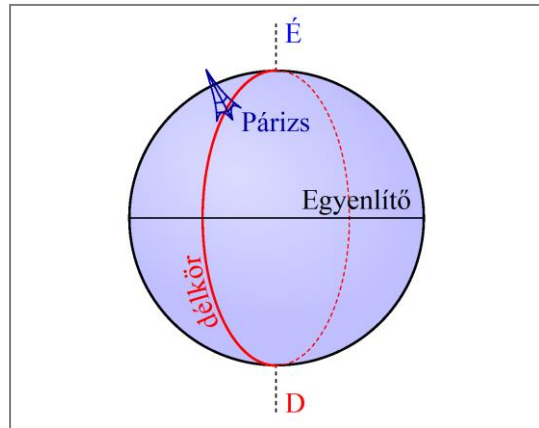
Az 1 méter hosszú matematikai inga lengésideje tehát kb. 2 másodperc.

## Kiegészítés

1. Galileo *Galilei* (1564–1642) olasz matematikus, fizikus és csillagász 1602-ben ismerte fel, hogy az inga lengésideje független az inga tömegétől és kis kitéréseknél az amplitúdótól is.
2. Az első ingaórát Christiaan *Huygens* (1629–1695) holland fizikus, csillagász készítette 1656-ban. Az 1673-ban megjelent *Horlogium oscillatorum* (Az ingaóra) című könyvében az ingák elméletén és az órakészítésen kívül számos mechanikai problémával, például az ütközésekkel és a centripetális erővel is foglalkozott.
3. A fenti *Példa* szerint az 1 m hosszú matematikai inga lengésideje kb. 2 másodperc. Mivel az ilyen inga a két szélső helyzet közti távot 1 másodperc alatt futja be, ezért *másodpercingának* nevezzük.



4. Az, hogy a másodpercinga hossza egy méter, nem véletlen. *Huygens* javasolta azt, hogy a másodpercinga hosszát válasszák a hosszúság egységének. Mivel azonban a lengésidő függ a  $g$  értékétől, így közvetve a földrajzi helytől is, a méterrendszer végül is nem a másodpercinga hosszúságára alapozták. Hosszúságegységként azonban gyakorlatilag







ugyanekkorra egységet, a Föld Párizson átmenő délkörének 40 milliomod részét választották. A délkör ugyanis mintegy 40 milliószor hosszabb, mint a Huygens által javasolt hosszegység. (A mérés technika fejlődése miatt a métert később más mérési eljárásokkal definiálták, de hosszát lényegében nem módosították.)

5. Jean Bernard *Foucault* (1819–1868) francia fizikus 1851-ben a párizsi *Panthéonban* egy 63 m hosszú, 24 kg tömegű ingával kísérletileg is igazolta a Föld forgását. (A Föld elfordult a lengő inga alatt.) Az inga lengésideje kb. 16 másodperc volt. Az eredeti Foucault-ingáról 1999-ben a Panthéonban készült YouTube-videó elérhető a <https://www.youtube.com/watch?v=FmE0kLCZO1s> címen.



Foucault életéről és tevékenységéről további információk a születésének 200. évfordulójára létrehozott honlapon található: <http://www.fizkapu.hu/foucault200/foucault200.html>.

## Képek jegyzéke

	<p><b>Vonalzó, mint fizikai inga</b>            © <a href="http://fizkapu.hu/fizfoto/fotok/fizf0220.jpg">http://fizkapu.hu/fizfoto/fotok/fizf0220.jpg</a></p>
	<p><b>Kis kitéréseknél az ingatest gyakorlatilag egyenes mentén rezeg</b>            © <a href="http://fizikakonyv.hu/rajzok/0317.svg">http://fizikakonyv.hu/rajzok/0317.svg</a></p>
	<p><b>Rajz az ingára ható erők eredőjének levezetéséhez</b>            © <a href="http://fizikakonyv.hu/rajzok/0318.svg">http://fizikakonyv.hu/rajzok/0318.svg</a></p>
	<p><b>Huygens arcképe</b>            W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christiaan_Huygens-painting.jpeg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christiaan_Huygens-painting.jpeg</a></p>
	<p><b>A Párizson áthaladó délkör</b>            © <a href="http://fizikakonyv.hu/rajzok/0319.svg">http://fizikakonyv.hu/rajzok/0319.svg</a></p>
	<p><b>Foucault portréja</b>            W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Portrait_Leon_Foucault_1882.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Portrait_Leon_Foucault_1882.jpg</a></p>
	<p><b>Az eredeti Foucault-inga a párizsi Panthéonban</b>            W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Panth%C3%A9on_Pendule_de_Foucault2.JPG">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Panth%C3%A9on_Pendule_de_Foucault2.JPG</a></p>
	<p><b>Az eredeti Foucault-inga ingateste</b>            W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paris_September_2016_IMGL0299_(29751643611).jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paris_September_2016_IMGL0299_(29751643611).jpg</a></p>

### Jelmagyarázat:

- © **Jogvéde**tt anyag, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.
- W A **Wikimedia Commons**-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.

	<i>Tartalom</i>	<i>Fogalmak</i>	<i>Törvények</i>	<i>Képletek</i>	<i>Lexikon</i>	
---	-----------------	-----------------	------------------	-----------------	----------------	---