A merev testre vonatkozó dinamikai tételek

A merev test részecskéi pontrendszert alkotnak, ezért a test mozgására érvényesek a pontrendszerre vonatkozó tételek.

A tömegközéppont tétel

A tételt már korábban (*A merev testre ható erők* című fejezetben) kimondtuk, itt csak megismételjük. *A merev test tömegének és a tömegközéppont gyorsulásának a szorzata megegyezik a merev testre ható (külső) erők vektori összegével.* Képlettel:

$$m \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \Sigma \boldsymbol{F}_{\mathrm{k}} \, .$$

Ha a merev testre ható (külső) erők vektori összege nullvektor, akkor

$$m \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \mathbf{0}.$$

Mindkét oldalt elosztva a tömeggel:

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \mathbf{0}.$$

A merev test tömegközéppontja ilyenkor tehát nem gyorsul, azaz a tömegközéppont sebessége állandó:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}} = \text{állandó}.$$

Eszerint, *ha a merev testre ható (külső) erők vektori összege nullvektor, akkor a test tömegközéppontjának sebessége állandó*:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}} = \text{állandó}, \qquad \text{ha } \Sigma \boldsymbol{F}_{\mathrm{k}} = \mathbf{0}.$$

Ez az összefüggés a *tömegközéppont sebességének megmaradási tétele*.

A lendülettétel

A merev testre, mint pontrendszerre alkalmazható a lendülettétel: *A merev test lendületének megváltozása megegyezik a testre ható (külső) erők által kifejtett erőlökések összegével.*

$$\Delta(\Sigma \boldsymbol{I}) = \Sigma \boldsymbol{p}_{\mathrm{k}} \, .$$

Ha a merev testre ható (külső) erők vektori összege nullvektor, akkor

$$\Sigma \boldsymbol{F}_\mathrm{k} = \boldsymbol{0}.$$

A merev test ebben az esetben zárt pontrendszernek tekinthető, így alkalmazható a lendületmegmaradás tétele: *Ha a merev testre ható (külső) erők vektori összege nullvektor, akkor a test lendülete állandó*:

$$\Sigma \boldsymbol{I} = \text{állandó}, \qquad \text{ha } \Sigma \boldsymbol{F}_\mathrm{k} = \boldsymbol{0}.$$

Ez az összefüggés a *lendületmegmaradás tételének* merev testre vonatkozó alakja.

A perdülettétel

A perdülettételt csak olyan pontrendszerre fogalmaztuk meg, amelyeknél minden egyes pontszerű test közös tengely körül forog. Mivel a merev test részecskéi ilyen rendszert alkotnak, ezért a tétel merev testre is alkalmazható: A részecskék összes perdületének megváltozása megegyezik a testre ható (külső) erők által kifejtett forgatólökések összegével. Képlettel:

$$\Delta(\Sigma N) = \Sigma \Pi_\mathrm{k}\,.$$

Részletesen felírva (felhasználva, hogy minden részecske szögsebessége ugyanakkora):

$$\Delta(\Theta_A \cdot \omega + \Theta_B \cdot \omega + \Theta_C \cdot \omega + \ \dots) = \Sigma \Pi_\mathrm{k}\,,$$

$$\Delta\big((\Theta_A + \Theta_B + \Theta_C + \ \dots) \cdot \omega\big) = \Sigma \Pi_\mathrm{k}\,.$$

A merev test tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \Theta_A + \Theta_B + \Theta_C + \ \dots,$$

ezért:

$$\Delta(\Theta \cdot \omega) = \Sigma \Pi_\mathrm{k}\,.$$

A merev test tehetetlenségi nyomatékának és szögsebességének szorzatát a test perdületének nevezzük. Jele: N. Ennek segítségével egyszerűen megfogalmazható a merev testre vonatkozó perdülettétel: *A merev test perdületének megváltozása megegyezik a testre ható (külső) erők forgatólökésének összegével*. Képlettel:

$$\Delta N = \Sigma \Pi_\mathrm{k}\,.$$

Ha a merev testre ható (külső) erők vektori összege nullvektor, akkor

$$\Sigma \boldsymbol{F}_\mathrm{k} = \boldsymbol{0}.$$

A merev test ebben az esetben zárt pontrendszernek tekinthető, így alkalmazható a perdületmegmaradás tétele: Ha a merev testre ható erők vektori összege nullvektor, akkor a test perdülete állandó:

$$N = \text{állandó},$$

azaz a merev test lendülete bármely két különböző időpontban ugyanakkora

$$N_1 = N_2 \,.$$

Részletesen felírva:

$$\Theta \cdot \omega_1 = \Theta \cdot \omega_2 \,.$$

Mindkét oldalt osztva a tehetetlenségi nyomatékkal:

$$\omega_1 = \omega_2 \,.$$

Ez bármely két időpontban igaz, tehát a merev test szögsebessége ilyen esetben állandó. *Ha a merev testre ható (külső) erők vektori összege nullvektor, akkor a test szögsebessége állandó:*

$$\omega = \text{állandó}, \qquad\qquad \text{ha } \Sigma \boldsymbol{F}_\mathrm{k} = \boldsymbol{0}.$$

Ez az összefüggés a *perdületmegmaradás tételének* merev testre vonatkozó alakja.

A munkatétel

A merev testre, mint pontrendszerre alkalmazható a munkatétel: *A merev test mozgási energiájának megváltozása megegyezik az egyes tömegpontokra ható erők munkájának összegével.*

$$\Delta\left(\Sigma E_\mathrm{mozg}\right) = \Sigma W.$$

A külső és belső erők munkáját külön-külön összegezve:

$$\Delta\left(\Sigma E_\mathrm{mozg}\right) = \Sigma W_\mathrm{k} + \Sigma W_\mathrm{b} \,.$$

A merev testnél azonban *a belső erők összes munkája nulla*. (Ennek igazolása a *Kiegészítések* című részben.) Ezt felhasználva megfogalmazható a merev testre vonatkozó munkatétel: *A merev test mozgási energiájának megváltozása megegyezik a testre ható (külső) erők munkájának összegével.*

$$\Delta\left(\Sigma E_\mathrm{mozg}\right) = \Sigma W_\mathrm{k} \,.$$

Tudjuk, hogy ha a merev test csupán *transzlációs mozgást* végez, akkor minden pont sebessége megegyezik egymással (és a tömegközéppont v_t sebességével). Emiatt:

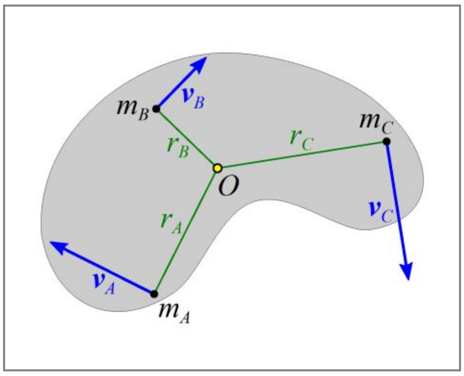
$$E_\mathrm{tr} = \Sigma E_\mathrm{mozg} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_\mathrm{t}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_\mathrm{t}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_C \cdot v_\mathrm{t}^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (m_A + m_B + m_C + \ldots) \cdot v_\mathrm{t}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\mathrm{t}^2 \,.$$

Tehát transzlációs mozgásnál *a merev test mozgási energiája*:

$$E_\mathrm{tr} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\mathrm{t}^2 \,.$$

Ha a merev test csupán *rotációs mozgást* végez, akkor a test egyes részecskéinek sebessége általában különböző, így a mozgási energia kiszámítása nehézkes. Láttuk azonban, hogy a merev test forgó mozgásánál minden pont szögsebessége megegyezik egymással. Emiatt, a $v = r \cdot \omega$ összefüggést is felhasználva:



$$E_\mathrm{rot} = \Sigma E_\mathrm{mozg} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^2 + \frac{1}{2} \cdot m_C \cdot v_C^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot (r_A \cdot \omega)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot (r_B \cdot \omega)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_C \cdot (r_C \cdot \omega)^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot r_A^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot r_B^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m_C \cdot r_C^2 \cdot \omega^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (m_A \cdot r_A^2 + m_B \cdot r_B^2 + m_C \cdot r_C^2 + \ldots) \cdot \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\Theta_A + \Theta_B + \Theta_C + \ldots) \cdot \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2.$$

Tehát rotációs mozgásnál *a merev test forgási energiája*:

$$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2.$$

Tudjuk, hogy a merev test mozgása általános esetben nagyon rövid időtartamokhoz tartozó elemi transzlációk és elemi rotációk sorozatának tekinthető. Ennek alapján bebizonyítható, hogy *ha a merev test tömegközpontja* v_{t} *sebességgel halad, továbbá a test* ω_{t} *szögsebességgel forog a tömegközépponton átmenő tengely körül, akkor a merev test mozgási energiája*:

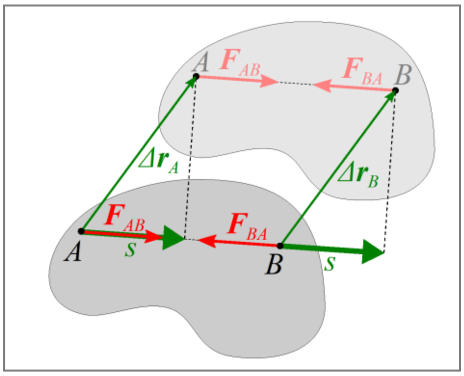
$$E = E_{\mathrm{tr}} + E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\mathrm{t}}^2 + \frac{1}{2} \cdot \Theta_{\mathrm{t}} \cdot \omega_t^2 \, .$$

A fenti képletben Θ_{t} a merev testnek a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát jelöli.

Kiegészítés

Az, hogy a merev testnél *a belső erők összes munkája nulla*, a következő módon igazolható. Tudjuk, hogy a merev test mozgása általános esetben nagyon rövid időtartamokhoz tartozó elemi transzlációk és elemi rotációk sorozatának tekinthető. Egy nagyon rövid Δt időtartam alatt a belső erők által végzett összes munka az ehhez az időtartamhoz tartozó elemi transzláció és elemi rotáció során végzett munkák összegével egyezik meg:

$$\Sigma W_{\mathrm{b}} = \Sigma W_{\mathrm{tr}} + \Sigma W_{\mathrm{rot}} \, .$$



Az *elemi transzláció során* a belső erők által végzett összes munka kiszámításához válasszuk ki a merev test két tetszőleges pontját! Jelöljük ezeket A-val és B-vel, a köztük ható belső erőket pedig $\boldsymbol{F}_{AB}$-vel és $\boldsymbol{F}_{BA}$-val! A hatás–ellenhatás törvénye miatt a két erő ugyanakkora, azaz

$$F_{AB} = F_{BA} \, .$$

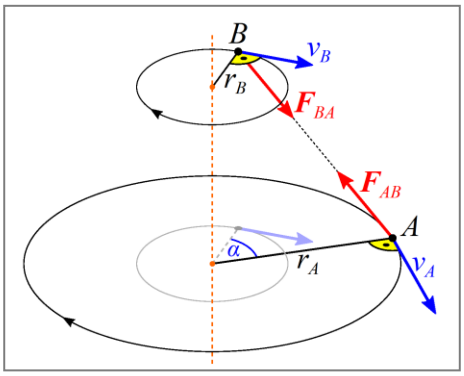
A transzláció során a merev test minden pontja ugyanúgy mozog, ezért Δt időtartam alatt A és B elmozdulása ugyanakkora, és mindkét pontnak az erő egyenesébe eső elmozdulása is ugyanakkora (s). A két erő összes munkája tehát:

$$W_{AB} + W_{BA} = F_{AB} \cdot s - F_{BA} \cdot s = F_{AB} \cdot s - F_{AB} \cdot s = 0.$$

Ez a gondolatmenet a test bármely két pontjára alkalmazható, emiatt a vizsgált elemi transzláció során a belső erők összes munkája nulla, azaz

$$\Sigma W_{\mathrm{tr}} = 0. \tag{1}$$

Az *elemi rotáció során* a belső erők által végzett összes munka kiszámításához vizsgáljuk meg a merev test két pontját! Az A és a B pontra ható belső erőket jelölje $\boldsymbol{F}_{AB}$ és $\boldsymbol{F}_{BA}$, e pontok sebességét $\boldsymbol{v}_A$ és $\boldsymbol{v}_B$, a körpályák sugarát r_A és r_B, a közös szögsebességüket pedig ω! A hatás ellenhatás törvénye miatt mindkét erő az AB szakaszra illeszkedik.



Az $\boldsymbol{F}_{AB}$ és az $\overrightarrow{AB}$ vektorok azonos irányúak, így található olyan λ skalár, amelyre teljesül, hogy

$$\boldsymbol{F}_{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}\,. \tag{2}$$

Az $\boldsymbol{F}_{BA}$ erő az $\boldsymbol{F}_{AB}$ ellentettje, ezért:

$$\boldsymbol{F}_{BA} = -\boldsymbol{F}_{AB} = -\left(\lambda \cdot \overrightarrow{AB}\right) = \lambda \cdot \left(-\overrightarrow{AB}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{BA}\,.$$

azaz

$$\boldsymbol{F}_{BA} = \lambda \cdot \overrightarrow{BA}\,. \tag{3}$$

A munka című fejezetben láttuk, hogy *a munka az elmozdulás és az elmozdulás irányába eső erő szorzataként is kiszámítható*. A választott nagyon rövid Δt időtartam alatti elmozdulás iránya megegyezik a pillanatnyi sebesség irányával, ezért először meghatározzuk az $\boldsymbol{F}_{AB}$ és $\boldsymbol{F}_{BA}$ erőnek a $\boldsymbol{v}_A$, illetve a $\boldsymbol{v}_B$ sebesség irányába eső összetevőjét, majd ezt felhasználva a két belső erő munkájának összegét. A továbbiakban a különféle vektoroknak a sebesség irányába eső összetevőjét *-gal jelöljük.

A (2) összefüggés miatt a $\boldsymbol{v}_A$ sebesség irányába eső összetevők nagyságára teljesül:

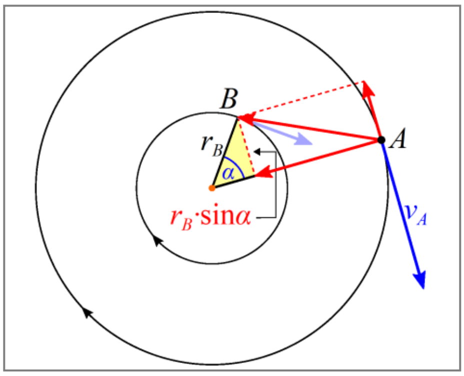
$$F_{AB}^{*} = \lambda \cdot \overline{AB}^{*}\,.$$

A rajz alapján belátható, hogy

$$\overline{AB}^{*} = r_B \cdot \sin\alpha\,.$$

ezért

$$F_{AB}^{*} = \lambda \cdot \overline{AB}^{*} = \lambda \cdot r_B \cdot \sin\alpha\,.$$



Az $\boldsymbol{F}_{AB}$ erő által Δt időtartam alatt végzett munka:

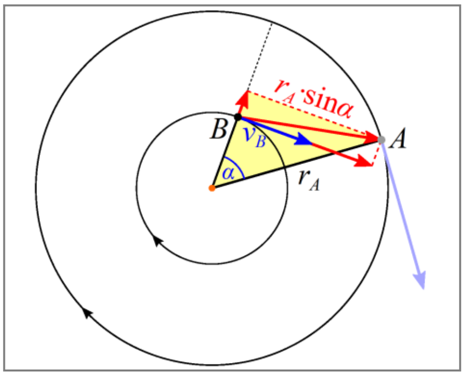
$$W_{AB} = -F^*_{AB} \cdot s_A = -F^*_{AB} \cdot v_A \cdot \Delta t = -F^*_{AB} \cdot \omega \cdot r_A \cdot \Delta t = -\lambda \cdot r_B \cdot \sin\alpha \cdot \omega \cdot r_A \cdot \Delta t,$$

azaz

$$W_{AB} = -\lambda \cdot r_A \cdot r_B \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha \,. \qquad (4)$$

(A munka kiszámításánál figyelembe vettük, hogy az elmozdulás és az elmozdulás irányába eső erő most ellentétes irányú.)

Ehhez hasonlóan a (3) miatt a $\boldsymbol{v}_B$ sebesség irányába eső összetevők nagyságára teljesül:



$$F^*_{BA} = \lambda \cdot \overline{BA}^* \,.$$

A rajz alapján belátható, hogy

$$\overline{BA}^* = r_A \cdot \sin\alpha \,,$$

ezért

$$F^*_{BA} = \lambda \cdot \overline{BA}^* = \lambda \cdot r_A \cdot \sin\alpha \,.$$

Az $\boldsymbol{F}_{BA}$ erő által Δt időtartam alatt végzett munka:

$$W_{BA} = F^*_{BA} \cdot s_B = F^*_{BA} \cdot v_B \cdot \Delta t = F^*_{BA} \cdot \omega \cdot r_B \cdot \Delta t = \lambda \cdot r_A \cdot \sin\alpha \cdot \omega \cdot r_A \cdot \Delta t,$$

azaz

$$W_{BA} = \lambda \cdot r_A \cdot r_B \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha \,. \qquad (5)$$

A két belső erő által végzett munka (4) és (5) alapján:

$$W = W_{AB} + W_{BA} = -\lambda \cdot r_A \cdot r_B \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha + \lambda \cdot r_A \cdot r_B \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha = 0$$

Ez a gondolatmenet a test bármely két pontjára alkalmazható, emiatt a vizsgált elemi transzláció során a belső erők összes munkája nulla, azaz

$$\Sigma W_{\mathrm{rot}} = 0. \qquad (6)$$

Megjegyzés:

Ha az AB egyenes metszi a tengelyt, akkor a belső erők merőlegesek a sebességekre (és az elmozdulásokra), így a végzett munka külön-külön is nulla. A fenti rajzok alapján belátható, hogy minden más esetben a két erő munkája egymás ellentettje.

Az (1) és (6) alapján a nagyon rövid Δt alatt a belső erők által végzett összes munka:

$$\Sigma W_{\mathrm{b}} = \Sigma W_{\mathrm{tr}} + \Sigma W_{\mathrm{rot}} = 0.$$

Eszerint a merev testnél *a belső erők összes munkája valóban nulla*.

Képek jegyzéke

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.