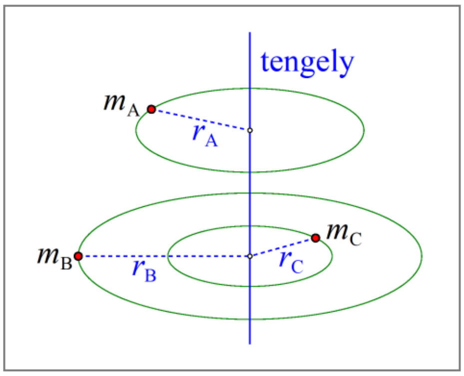
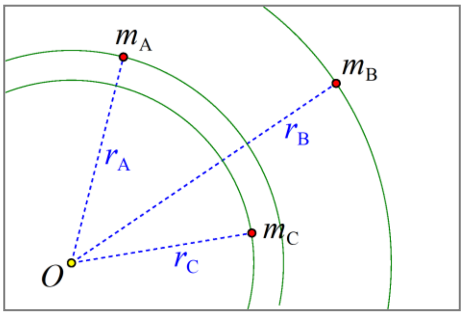
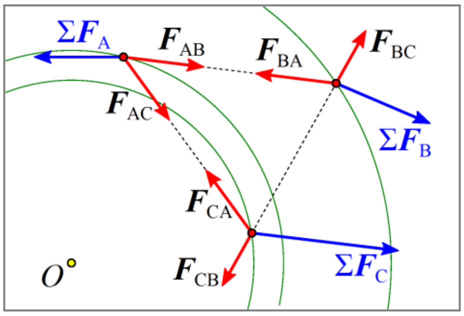
 



# A pontrendszerre vonatkozó perdülettétel




A következőkben csak olyan pontrendszerekkel foglalkozunk, amelyekben a rendszer minden tagja körmozgást végez egy közös tengely körül.

A *pontrendszerre vonatkozó perdülettétel* levezetéséhez elemezzünk egy olyan rendszert, amely három pontszerű testből áll! Mindhárom pontszerű testre felírjuk a perdülettételt:

$$\Delta N_A = (\Sigma M_A + M_{AB} + M_{AC}) \cdot \Delta t$$

$$\Delta N_B = (\Sigma M_B + M_{BA} + M_{BC}) \cdot \Delta t$$

$$\Delta N_C = (\Sigma M_C + M_{CA} + M_{CB}) \cdot \Delta t$$

(Az ábrán az egyes testekre ható külső erők vektori összegét kék nyíllal ábrázoltuk, a fenti egyenletekben ezek forgatónyomatékát jelöli $\Sigma M_A$, $\Sigma M_B$ és $\Sigma M_C$.)

A három egyenletet összeadva és a közös $\Delta t$-t kiemelve:

$$\Delta N_A + \Delta N_B + \Delta N_C = (\Sigma M_A + MF_{AB} + M_{AC} + \Sigma M_B + M_{BA} + M_{BC} + \Sigma M_C + M_{CA} + M_{CB}) \cdot \Delta t$$

A két oldalt külön-külön átalakítjuk. A bal oldal:

$$\Delta N_A + \Delta N_B + \Delta N_C =$$

$$= N_{A2} - N_{A1} + N_{B2} - N_{B1} + N_{C2} - N_{C1} =$$

$$= N_{A2} + N_{B2} + N_{C2} - (N_{A1} + N_{B1} + N_{C1}) =$$

$$= \Sigma N_2 - \Sigma N_1 =$$

$$= \Delta(\Sigma N)$$

A jobb oldal:

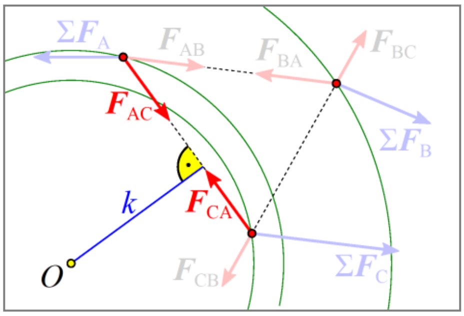
$$(\Sigma M_{\mathrm{A}} + MF_{\mathrm{AB}} + M_{\mathrm{AC}} + \Sigma M_{\mathrm{B}} + M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{BC}} + \Sigma M_{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{CA}} + M_{\mathrm{CB}}) \cdot \Delta t =$$

$$= (\Sigma M_{\mathrm{A}} + \Sigma M_{\mathrm{B}} + \Sigma M_{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{AB}} + M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{AC}} + M_{\mathrm{CA}} + M_{\mathrm{BC}} + M_{\mathrm{CB}}) \cdot \Delta t =$$

$$= (\Sigma M_{\mathrm{A}} + \Sigma M_{\mathrm{B}} + \Sigma M_{\mathrm{C}} + 0 + 0 + 0) \cdot \Delta t =$$

$$= \Sigma M_{\mathrm{A}} \cdot \Delta t + \Sigma M_{\mathrm{B}} \cdot \Delta t + \Sigma M_{\mathrm{C}} \cdot \Delta t =$$

$$= \Sigma \Pi_{\mathrm{k}}$$




Itt felhasználtuk, hogy bármely két testnél a közöttük ható belső erők forgatónyomatékának összege nulla. A két erő ugyanis Newton II. törvénye szerint azonos nagyságú, ellentétes irányú és közös hatásvonalú, és a rajz alapján könnyen belátható, hogy mindkét erőnél az erőkar is ugyanaz. Az „A" és „C" jelű testeknél például:

$$M_{\mathrm{CA}} + M_{\mathrm{AC}} = F_{\mathrm{CA}} \cdot k - F_{\mathrm{AC}} \cdot k = 0$$

A két oldal átalakítása után tehát a következő összefüggést kapjuk:

$$\Delta(\Sigma N) = \Sigma \Pi_{\mathrm{k}}$$

A tétel több testből álló rendszernél, változó erők esetén is hasonlóan igazolható. Ennek alapján a most kapott eredmény általánosan is megfogalmazható: *A pontrendszer összes perdületének megváltozása megegyezik a rendszerre ható külső erők által kifejtett forgatólökések összegével.* Képlettel:

$$\Delta(\Sigma N) = \Sigma \Pi_{\mathrm{k}}$$

Ezt az összefüggést a *pontrendszerre vonatkozó perdülettételnek* nevezzük.

A most kapott összefüggés szerint *a rendszer összes perdületét csak a külső erők képesek megváltoztatni.* A belső erők ugyan egy test perdületét megváltoztathatják, de az mindig együtt jár egy másik, szintén a rendszerhez tartozó test perdületváltozásával. A két perdületváltozás összege nulla, így *a belső erők az összes perdületet nem befolyásolják.*

*Zárt rendszernél* a rendszer tagjaira ható külső erők vektori összege nullvektor, így a külső erők forgatólökésének összege szintén nulla:

$$\Sigma \Pi_{\mathrm{k}} = 0$$

Ezt a perdülettételbe helyettesítve:

$$\Delta(\Sigma N) = 0$$

A rendszer összes perdületének megváltozása tehát nulla, azaz az összes perdület állandó. Ezt felhasználva megfogalmazható a perdületmegmaradás tétele: *A zárt rendszer összes perdülete állandó.* Képlettel:

$$\Sigma N = \text{állandó}, \qquad \text{ha} \qquad \Sigma \boldsymbol{F}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{0}$$

## Kiegészítések

**1.** Tudjuk, hogy a forgatónyomatékot valójában vektorként értelmezhetjük. Hasonló a helyzet a szögsebességnél és a perdületnél is, mindkettő vektorként értelmezhető. Ennek megfelelően a perdülettételt és a perdület megmaradásának tételét is vektorokkal kellene megfogalmazni, ezzel azonban bonyolultsága miatt középiskolai szinten nem foglalkozunk. A tengely körül forgó pontrendszerre azonban egyszerűbben megfogalmazhatók ezek a tételek, továbbá ezeknek a rendszereknek a műszaki gyakorlatban nagyobb jelentősége van (forgó gépalkatrészek). Ezért itt csak ilyen eseteket vizsgáltunk.

**2.** A műkorcsolyázóra forgás közben csak a nehézségi erő és a jég által kifejtett tartóerő hat (a súrlódás elhanyagolhatóan kicsi). E két erő vektori összege nulla, tehát a korcsolyázó zárt rendszernek tekinthető, így perdülete állandó.

$$\Sigma N = \text{állandó}$$

A perdületét részletesen felírva:

$$m_1 \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot r_2^2 \cdot \omega_2 + m_3 \cdot r_3^2 \cdot \omega_3 + \cdots = \text{ állandó}$$

Amikor forgás közben a korcsolyázó karjait behúzza és lábait összezárja, akkor testének egyes pontjai közelebb kerülnek a forgástengelyhez, a pályák sugarai csökkennek. A forgás szögsebessége azonban ilyenkor megnövekszik úgy, hogy az összes perdület változatlan marad. Amikor karjait kinyújtja, akkor testének egyes pontjai távolabb kerülnek a forgástengelytől, a forgás szögsebessége viszont csökken. A korcsolyázó összes perdülete azonban ismét változatlan marad.

# Képek jegyzéke



***Jelmagyarázat:***

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

**W** A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.