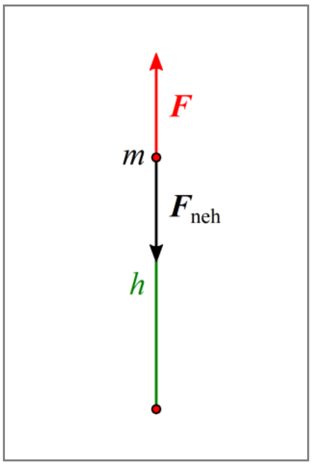
A munkavégzés fajtái

Ha egy testet egyenletes mozgással felemelünk, akkor erőt kell kifejtenünk. Emeléskor az erő irányában a test elmozdul, így munkavégzés is történik. *Az emelés során végzett munkát emelési munkának nevezzük.* Mivel a mozgás egyenletes, az általunk kifejtett erő nagysága ugyanakkora, mint a nehézségi erő nagysága, azaz *m* tömegű testnél:

$$F = F_{\text{neh}} = m \cdot g$$



Az erő irányába eső elmozdulás nagysága emeléskor megegyezik a *h* magasságkülönbséggel. Ezt felhasználva:

$$W = F \cdot s = m \cdot g \cdot h$$

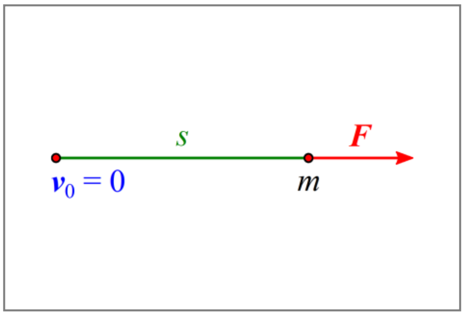
Eszerint az *m* tömegű test *h* magasságra történő emelésekor végzett *emelési munka* a

$$W = m \cdot g \cdot h$$

összefüggés alapján határozható meg.

Ha egy kezdetben nyugvó testre állandó erő hat, a test egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végez. A test a mozgás során az erő irányába elmozdul, így munkavégzés is történik. *A gyorsítás közben végzett munkát gyorsítási munkának nevezzük.* Ha az *m* tömegű test *t* idő alatt álló helyzetből *v* sebességre gyorsul, akkor a testre ható erő nagysága Newton második törvénye alapján:

$$F = m \cdot a$$



A kezdősebesség nélküli, egyenletesen változó mozgásnál az elmozdulás a négyzetes úttörvény alapján számítható ki:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

A fenti összefüggéseket felhasználva:

$$W = F \cdot s = \ m \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{m \cdot a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{m \cdot (a \cdot t)^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

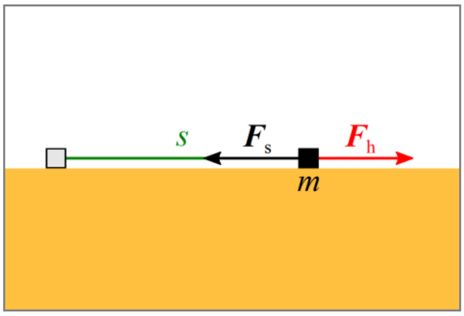
Ezek szerint, ha a kezdetben nyugvó, m tömegű test egyenes vonalú egyenletesen változó mozgással *v* sebességre gyorsul, akkor a *gyorsítási munka* a

$$W = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

összefüggés alapján számítható ki.

Ha egy testet vízszintes felületen mozgatunk úgy, hogy a test egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez, akkor *a súrlódási erő ellenében munkát kell végeznünk*. Mivel a test egyenletesen mozog, a testre ható erők eredője nulla. A húzóerő ilyenkor egyenlő nagyságú a súrlódási erővel, de azzal ellentétes irányú, ezért:

$$F_\mathrm{h} = F_\mathrm{s} = \mu \cdot F_\mathrm{n}$$



Ha a test csak a nehézségi erő következtében nyomja az alátámasztást, akkor a nyomóerő megegyezik a test súlyával. Ezt felhasználva:

$$F_\mathrm{h} = \mu \cdot F_\mathrm{n} = \mu \cdot G = \mu \cdot m \cdot g$$

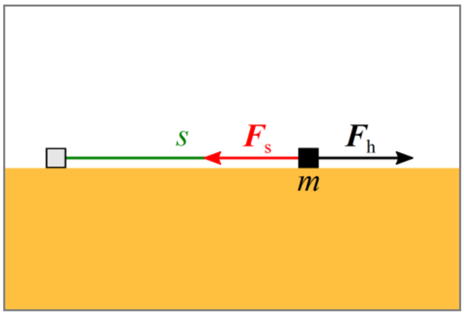
Mivel a test elmozdulásának iránya megegyezik a húzóerő irányával, így a húzóerő munkája:

$$W = F_\mathrm{n} \cdot s = \ \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

Eszerint ha vízszintes felületen egy m tömegű testet egyenletesen mozgatunk úgy, hogy az elmozdulás nagysága s, akkor a *súrlódási erő ellenében végzett munka* a

$$W = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

képlet alapján számítható ki.



Csúszási súrlódásnál a súrlódási erő iránya ellentétes az elmozdulás irányával, ezért a *súrlódási erő munkája* negatív, és a

$$W = -\ \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

összefüggés alapján határozható meg.

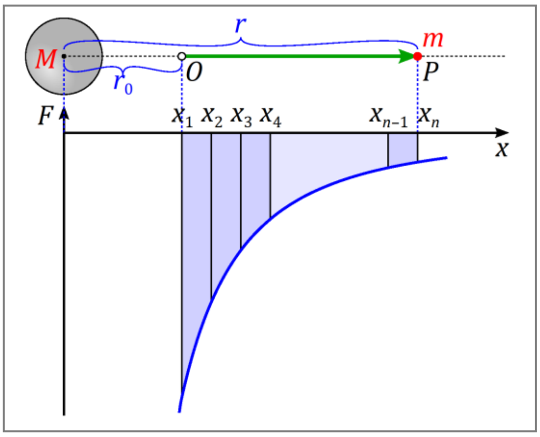
Kiegészítések

1. Az emelési munkára levezetett $W = m \cdot g \cdot h$ képlet csak *kis magasságra* történő emeléseknél érvényes, mert az $F_{\mathrm{neh}} = m \cdot g$ nehézségi erő nem állandó, hanem a magasság növekedésével folyamatosan csökken.

2. A következőkben meghatározzuk, hogy egy M tömegű *égitest gravitációs mezőjében mekkora munkát végez a gravitációs erő*, ha egy m tömegű pontszerű testet sugárirányban, az égitest középpontjától távolodva elmozdítunk (felemelünk)! A testre ható gravitációs erő nagysága az égitest középpontjától x távolságban:

$$F = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x^2}.$$

Az erő és az elmozdulás azonban ellentétes irányú. *A munka* című fejezetben láttuk, hogy a munka az erő-elmozdulás grafikon alapján határozható meg: A munkának most *a függvénygörbe és az elmozdulástengely közti síkidom területének ellentettje* (mínusz egyszerese) felel meg. Osszuk fel a rajz szerint az elmozdulást $n-1$ egyenlő részre! Az első szakaszon közelítsük a függvénygörbe és az elmozdulástengely közti síkidomot egy trapézzal! A végzett munka a trapéz területe alapján:



$$W_1 = -\frac{F_1 + F_2}{2} \cdot (x_2 - x_1). \qquad (1)$$

Matematikából ismert, hogy két pozitív mennyiség számtani és mértani közepe annál közelebb van egymáshoz, minél kisebb a két mennyiség eltérése. Ezért az F_1 és F_2 erők számtani közepét a mértani középpel helyettesítve:

$$\frac{F_1 + F_2}{2} \approx \sqrt{F_1 \cdot F_2} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x_1^2} \cdot \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x_2^2}} = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x_1 \cdot x_2}.$$

Ezt az (1) összefüggésbe helyettesítve, majd a beszorzást elvégezve:

$$W_1 = -\frac{F_1 + F_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) \approx -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x_1 \cdot x_2} \cdot (x_2 - x_1) = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right).$$

Ehhez hasonlóan látható be, hogy a további szakaszokon végzett munkák közelítő értékei:

$$W_2 = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right),$$

$$W_3 = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4}\right),$$

$$\vdots$$

$$W_{n-1} = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right).$$

A teljes munka a fenti munkák összegével közelíthető, azaz

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ \dots \ + W_{n-1}.$$

Az előzőek behelyettesítésével:

$$W = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left[\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \left(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4}\right) + \ \dots \ + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right)\right].$$

A belső zárójelek felbontása és az összevonások után:

$$W = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n}\right).$$

Ez a közelítés annál pontosabb, minél rövidebb szakaszokra osztjuk az elmozdulást, mivel ilyenkor egyrészt kisebb a számtani és mértani közép közti eltérés, másrészt a trapézok területe jobban megközelíti a függvénygörbe és az elmozdulástengely közti síkidomok területét. Határesetben, ha az elmozdulást az elképzelhető legrövidebb szakaszokra bontjuk, akkor az ábra jelöléseit használva

$$W = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right).$$

Eszerint, ha egy m tömegű pontszerű testet az M tömegű égitest középpontjától r_0 távolságban lévő O pontból sugárirányban, az égitest középpontjától r távolságra található P pontba viszünk, akkor az OP szakaszon *a gravitációs erő munkája*:

$$W = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right). \qquad (2)$$

3. Ha az O kezdőpont az égitest felszínén van, a P végpont pedig nagyon távol van az égitesttől (azaz $r \to \infty$), akkor

$$r_0 = R \qquad\qquad \textit{és} \qquad\qquad \frac{1}{r} \approx 0.$$

Ezeket a (2) összefüggésbe beírva:

$$W = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R} - 0\right) = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{R}.$$

Igazolható, hogy a gravitációs erő ellenében akkor is ugyanekkora munkát kell végezni, ha a test nem sugárirányban, hanem tetszőleges úton jut el egy végtelen távol lévő pontba. Mindezek szerint, ha egy m tömegű pontszerű test az M tömegű, R sugarú égitest felszínéről indulva a végtelen távoli P pontba jut, akkor a *gravitációs erő munkája*:

$$W = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{R}. \tag{3}$$

3. Ha az m tömegű pontszerű testet az M tömegű, R sugarú égitest felszínéről indulva sugárirányban egyenletes mozgással visszük el a végtelen távoli P pontba, akkor ehhez a nehézségi erő ellenében erőt kell kifejtenünk. Az egyenletes mozgás miatt a testre ható gravitációs erő és az emelőerő vektori összege a pálya bármely pontjában nulla, ezért a két erő egymás ellentettje:

$$\boldsymbol{F}_{\text{grav}} + \boldsymbol{F}_{\text{emelő}} = \boldsymbol{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{F}_{\text{grav}} = -\boldsymbol{F}_{\text{emelő}}.$$

Az emelőerő tehát ugyanakkora, mint a gravitációs erő, de azzal ellentétes irányú, tehát iránya a pálya bármely pontjában megegyezik az elmozdulás irányával. Emiatt az emelőerő munkája megegyezik a gravitációs erő munkájának ellentettjével (mínusz egyszeresével). A (3) összefüggést felhasználva tehát: Ha az m tömegű pontszerű testet az M tömegű, R sugarú égitest felszínéről indulva sugárirányban egyenletes mozgással visszük el a végtelen távoli P pontba, akkor a *gravitációs erő ellenében végzett munka*:

$$W = \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{R}. \tag{4}$$

Képek jegyzéke

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.