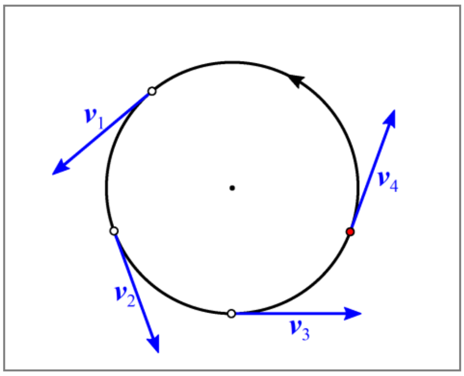
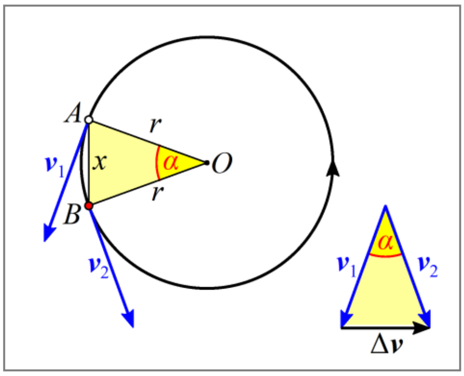
A centripetális gyorsulás



Az egyenletes körmozgást végző test sebességének nagysága ugyan állandó, a sebesség iránya azonban minden pillanatban más és más, ezért *az egyenletes körmozgás változó sebességű mozgás*.

A következőkben *meghatározzuk az egyenletes körmozgást végző test gyorsulását*. A definíció szerint a test valamely Δt időtartamhoz tartozó átlaggyorsulása:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}.$$



A sebességváltozás a $\boldsymbol{v}_2$ és $\boldsymbol{v}_1$ sebességek különbsége:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1.$$

A *sebességváltozás nagyságát* a rajz alapján határozhatjuk meg. Az OABΔ egyenlő szárú háromszög, mert két oldala r hosszúságú. A $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ és $\Delta \boldsymbol{v}$ által alkotott háromszög szintén egyenlő szárú, mert $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ nagysága ugyanakkora: v. A két háromszög hasonló, mert két oldaluk (száraik) aránya, valamint a köztük fekvő szög mindkét háromszögben ugyanakkora. A hasonló háromszögekben azonban az egymásnak megfelelő többi oldal aránya is megegyezik egymással, ezért:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{x}{r}.$$

Ebből a sebességváltozás nagysága:

$$\Delta v = \frac{x \cdot v}{r}.$$

Ezt felhasználva az *átlaggyorsulás nagysága*:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{x \cdot v}{r}}{\Delta t} = \frac{x \cdot v}{\Delta t \cdot r} = \frac{x}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r} = \bar{v} \cdot \frac{v}{r},$$

azaz

$$\bar{a} = \bar{v} \cdot \frac{v}{r}.$$

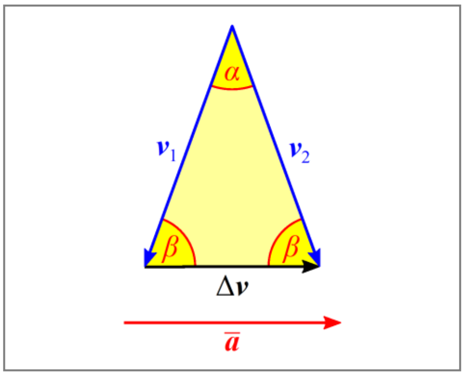
Ha ugyanezt az összefüggést az elképzelhető legrövidebb Δt időtartamra írjuk fel, akkor $\bar{a} = a$ és $\bar{v} = v$, ezért:

$$a = v \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}.$$

Ezek szerint az egyenletes körmozgást végző test *gyorsulásának nagysága*:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

A *gyorsulás irányát* a Δt időtartam alatt bekövetkező átlaggyorsulás iránya alapján határozhatjuk meg. Az átlaggyorsulás definíciójából adódóan az átlaggyorsulás iránya megegyezik a sebességváltozás irányával. Ha a $\Delta \boldsymbol{v}$ és a $\boldsymbol{v}_1$ közti szöget β-val jelöljük, akkor a a $\Delta \boldsymbol{v}$ és a $\boldsymbol{v}_2$ közti szög is β nagyságú. A háromszög szögeinek összegére vonatkozó összefüggés szerint:

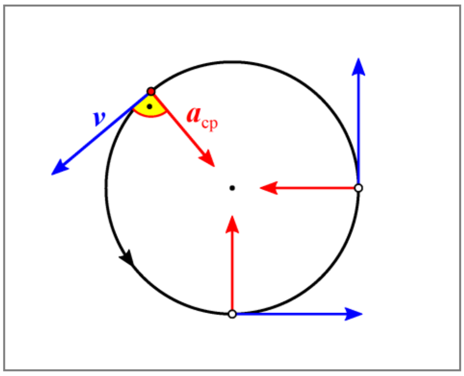


$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180°, \qquad \text{így} \qquad \beta = \frac{180° - \alpha}{2}.$$

Ha Δt az elképzelhető legrövidebb időtartam, akkor $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ iránya gyakorlatilag megegyezik. Ennek következtében $\alpha = 0$, tehát

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{180° - 0°}{2} = 90°$$

Ez azt jelenti, hogy a pillanatnyi gyorsulás mindig merőleges a pillanatnyi sebességre. Mivel a sebesség érintőirányú, ezért a *gyorsulás a körpálya középpontja felé mutat. Az egyenletes körmozgást végző test gyorsulását centripetális gyorsulásnak* nevezik, jele $\boldsymbol{a}_{\mathrm{cp}}$.



A centripetális gyorsulás nagyságát kiszámíthatjuk a szögsebesség és a sugár ismeretében is:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{r} = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{r} = r \cdot \omega^2 .$$

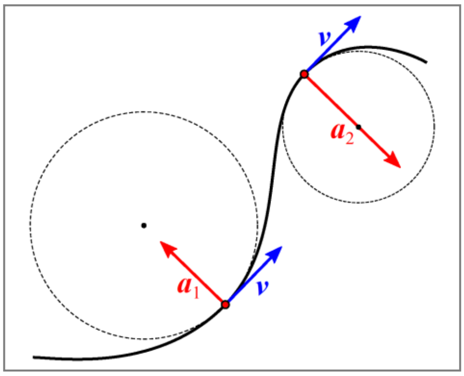
Ezek szerint *a centripetális gyorsulás nagysága*:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r}, \qquad \text{illetve} \qquad a_{\mathrm{cp}} = r \cdot \omega^2$$

Kiegészítés

1. A *centripetális* szó latin eredetű. A centrum középpontot jelent, a petalis (kiejtése: petálisz) jelentése: valami felé igyekvő, törekvő. Az egyenletes körmozgás gyorsulása a körpálya középpontja felé irányul, ezért kapta a centripetális gyorsulás elnevezést.

2. Láttuk, hogy az egyenletes körmozgás gyorsulása merőleges a sebességre. Ez más mozgásokra is általánosítható: Igazolható, hogy *görbe vonalú, egyenletes mozgásoknál a gyorsulás mindig merőleges a pillanatnyi sebességre*. (A pálya adott szakaszát egy körívvel közelítve a gyorsulás ennek a körívnek a középpontja felé mutat.)



3. A centripetális gyorsulás nagyságára kapott összefüggést átrendezve:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad a_{\mathrm{cp}} \cdot r = v^2 .$$

Mivel görbe vonalú, egyenletes mozgásnál a sebesség állandó, ezért

$$a_{\mathrm{cp}} \cdot r = \text{állandó.}$$

Eszerint *a görbe vonalú, egyenletes mozgásoknál a gyorsulás nagysága fordítottan arányos a pálya sugarával*. Emiatt enyhe kanyarban kisebb, éles kanyarban nagyobb a gyorsulás. (Például a fenti rajzon a sugár az első helyzetben 1,5-szer nagyobb, mint a másodikban, ezért a gyorsulás a második helyzetben 1,5-szer nagyobb, mint az elsőben.) A pálya esetleges egyenes szakaszai végtelen nagy sugarú körnek tekinthetők, ehhez pedig nulla gyorsulás tartozik.

Képek jegyzéke

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.