

| | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|----------------|---|
| ◀ | <i>Tartalom</i> | <i>Fogalmak</i> | <i>Törvények</i> | <i>Képletek</i> | <i>Lexikon</i> | ▶ |
|---|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|----------------|---|

Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás

Az olyan mozgást, amelyeknél a pontszerű test mozgásának pályája egyenes és a gyorsulás állandó nagyságú, *egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnak* nevezzük. Mivel a pálya egyenes, az elmozdulás-, a sebesség- és a gyorsulásvektor minden pillanatban a pálya egyenesébe esik. A mozgás közben a gyorsulás minden pillanatban ugyanakkora, így a mozgás bármely szakaszán az átlaggyorsulás is ugyanekkora. Eszerint *egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnál az átlaggyorsulás megegyezik a gyorsulással*, azaz:

$$\bar{a} = a = \text{állandó} . \quad (1)$$

Az „egyenletesen változó” jelző arra utal, hogy a sebesség nagysága egyenletesen változik, azaz a sebességváltozás egyenesen arányos az idővel. Az előzőek szerint ugyanis

$$\bar{a} = \text{állandó} .$$

Ebből az átlaggyorsulás definíciója alapján:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{állandó} ,$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy az *egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnál a sebességváltozás egyenesen arányos a sebességváltozás időtartamával*.

A következőkben meghatározzuk, hogy az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test sebessége hogyan függ az időtől. Az (1) összefüggést felírva:

$$\bar{a} = a .$$

Az átlaggyorsulás definíciója alapján:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a .$$

Mindkét oldalt Δt -vel szorozva:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t . \quad (2)$$

Ha a mozgást az időmérés kezdetétől ($t_0 = 0$) egy tetszőleges t időpontig vizsgáljuk, akkor:

$$\Delta t = t - t_0 = t - 0 = t .$$

Ha a test kezdeti sebességét a vizsgált időtartam kezdetén v_0 , végén pedig v jelöli, akkor a sebességváltozás:

$$\Delta v = v - v_0 .$$

Ezeket a (2) képletbe helyettesítve:

$$v - v_0 = a \cdot t .$$

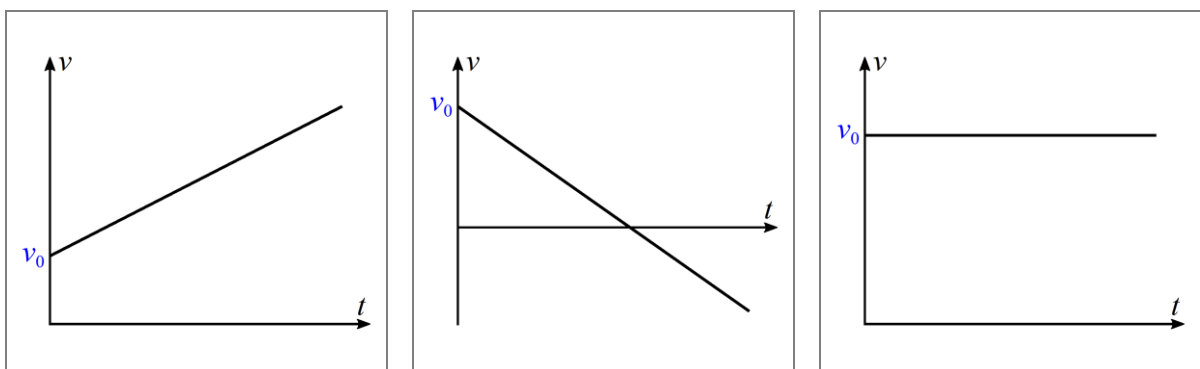
Ebből az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test sebessége:

$$v = v_0 + a \cdot t .$$

Az egyenes vonalú mozgásoknál látottaknak megfelelően célszerű a mozgást olyan koordináta-rendszerben vizsgálni, amelynek X tengelye a kezdősebesség irányába mutat. (Ha a test álló helyzetből indul, azaz nincs kezdősebessége, akkor válasszunk olyan koordinátarendszert, amelynek az X tengelye a gyorsulás irányába mutat!) Ilyen rendszerben az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test sebességének X koordinátája:

$$v = v_0 + a \cdot t . \quad (3)$$

Ha a sebesség–idő közti összefüggést grafikusán ábrázoljuk, akkor minden esetben egy egyenest kapunk, vagyis az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test sebessége lineáris függvénye az időnek.



Az egyenes és a sebességtengely metszéspontját a kezdősebesség határozza meg, az egyenes meredeksége pedig a gyorsulástól függ. Ha a gyorsulás a kezdősebességgel megegyező irányú, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő, ha a kezdősebességgel ellentétes irányú, akkor szigorúan monoton csökkenő. (A sebesség ilyenkor negatívvá is válhat, ami azt

jelzi, hogy a sebesség iránya a kezdeti sebességgel ellentétesé vált.) Ha a gyorsulás nulla, akkor a sebesség állandó, mivel (3) alapján

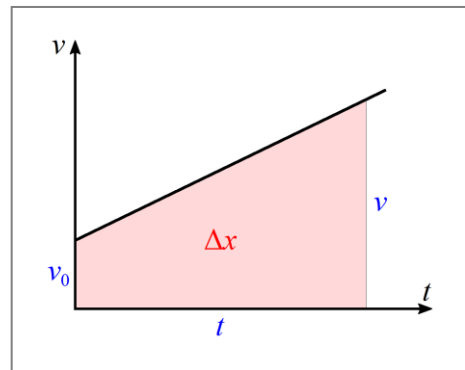
$$v = v_0 + a \cdot t = v_0 + 0 \cdot t = v_0 = \text{állandó} .$$

A mozgás ebben az esetben olyan *egyenes vonalú, egyenletes mozgás*, melynek sebessége megegyezik a kezdősebességgel. Emiatt a mozgás sebesség–idő grafikonját megrajzolva az időtengellyel párhuzamos egyenest kapunk.

A továbbiakban meghatározzuk, hogy az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test elmozdulása, illetve a megtett út hogyan függ az időtől. A fenti három grafikonnak megfelelően három esetet különböztethetünk meg.

Elsőként azt az esetet vizsgáljuk, amelynél a test sebességének az iránya nem változik meg. Tudjuk, hogy ilyenkor a sebesség–idő grafikon függvénygörbéje és a t tengely közti síkidom területe felel meg az elmozdulásnak. Az ábra alapján belátható, hogy

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t .$$



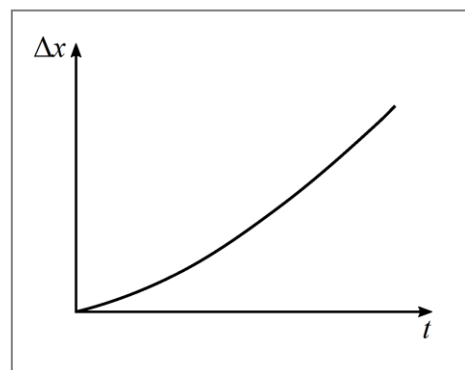
Az elmozdulás kiszámítására ez a képlet is gyakran hasznos lehet, de érdemes a (3) összefüggés felhasználásával átalakítani:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 .$$

Eszerint az elmozdulás:

$$\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 .$$

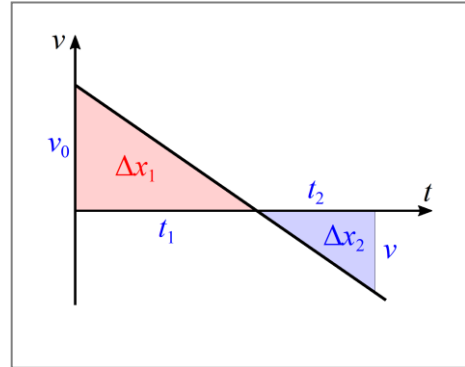
Mivel elmozdulás és az idő közti kapcsolat egy másodfokú függvénnyel írható le, az elmozdulás–idő grafikon függvénygörbéje parabola. (A parabola tengelypontja azonban nem az origóban van.)



Mivel ilyenkor a test sebességének iránya nem változik meg, az út ugyanakkora, mint az elmozdulás, azaz:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

Második esetben, ha a test sebessége a kezdősebességgel ellentétes irányúvá válik, akkor az elmozdulásnak a két háromszög területének előjeles összege felel meg. Mivel most v negatív, így a második háromszög befogóinak hossza $-v$ és t_2 . Az elmozdulások az ábra alapján:



$$\Delta x = \frac{v_0 \cdot t_1}{2} - \frac{-v \cdot t_2}{2} = \frac{v_0 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{2}.$$

Az átlaggyorsulás definíciója alapján a t_1 és t_2 időtartamok:

$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v_1}{t_1} = \frac{0 - v_0}{t_1} = -\frac{v_0}{t_1} \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{v_0}{a},$$

$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v_2}{t_2} = \frac{v - 0}{t_2} = \frac{v}{t_2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v}{a}.$$

Ezeket az előző összefüggésbe helyettesítve:

$$\Delta x = \frac{v_0 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{2} = \frac{-\frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{a}}{2} = \frac{-v_0^2 + v^2}{2 \cdot a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a}.$$

A számlálót szorzattá alakítva, majd a gyorsulás definícióját felhasználva:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{(v + v_0) \cdot (v - v_0)}{2 \cdot a} = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v + v_0}{2} \cdot t,$$

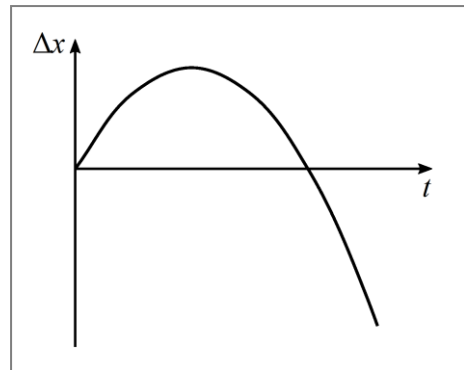
azaz

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t,$$

Ebből pedig a $v = v_0 + a \cdot t$ helyettesítéssel, a korábban látott módon az előzővel megegyező alakú összefüggést kapunk az elmozdulásra:

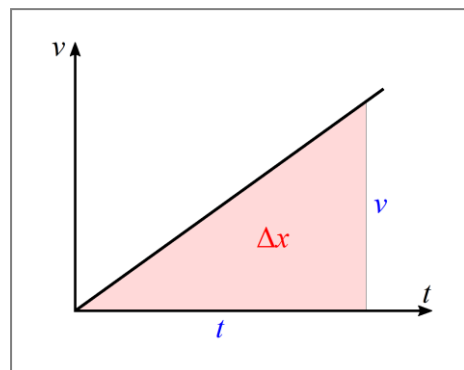
$$\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

A másodfokú függvénykapcsolat miatt az elmozdulás–idő–grafikon függvénygörbéje most is parabola. A gyorsulás azonban negatív, ezért a parabola „lefelé nyitott”. Ezzel összhangban a t értékétől függően az elmozdulás pozitív, nulla vagy akár negatív is lehet. Például egy erkélyről függőlegesen feldobott labda elmozdulása a mozgás első szakaszában pozitív; amikor újra az erkély magasságába ér, akkor nulla; a földre érkezéskor pedig negatív.



A test által megtett utat ebben az esetben úgy határozhatjuk meg, hogy a mozgást olyan szakaszokra bontjuk, amelyeken a test egyirányú mozgást végez. Az egyes szakaszokon az út megegyezik az elmozdulás hosszával, így a teljes utat ezen elmozdulások nagyságának összegeként számíthatjuk ki.

Végezetül, ha az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test álló helyzetből indul, akkor $v_0 = 0$. A korábbiaknak megfelelően ilyenkor a mozgást vizsgáljuk olyan koordináta-rendszerben, amelynek X tengelye a gyorsulás irányába mutat! Ekkor a test elmozdulásának egy derékszögű háromszög területe felel meg, azaz:



$$\Delta x = \frac{v}{2} \cdot t.$$

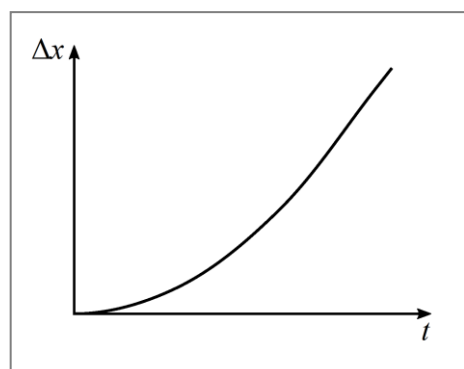
Ebből a $v = v_0 + a \cdot t$ helyettesítéssel:

$$\Delta x = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{0 + a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{a}{2} \cdot t^2,$$

azaz az elmozdulás

$$\Delta x = \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

A másodfokú függvénykapcsolat miatt az elmozdulás–idő grafikon függvénygörbéje ilyenkor is parabola, de a parabola tengelypontja most az origóban van.



Mivel ebben az esetben a sebesség iránya a mozgás folyamán nem változik, az út megegyezik az elmozdulás nagyságával, azaz:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

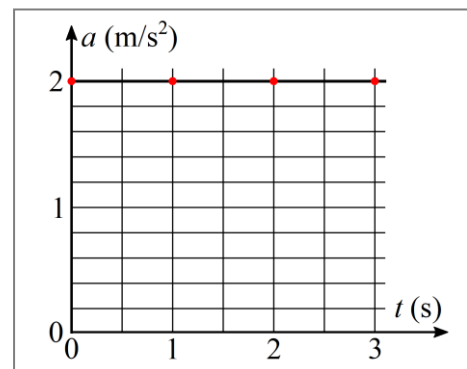
Ezt az összefüggést *négyzetes úttörvénynek* nevezzük.

Példák

1. Egy test álló helyzetből indulva egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végez, gyorsulása 2 m/s^2 . Rajzoljuk meg a mozgás első három másodperces szakaszához tartozó gyorsulás–idő, a sebesség–idő és az elmozdulás–idő grafikonokat!

Megoldás:

A gyorsulás állandó, azaz minden pillanatban 2 m/s^2 , ezért a gyorsulás–idő grafikon függvénygörbéje a t tengellyel párhuzamos egyenes. A grafikonon a 0, 1, 2 és 3 másodperchez tartozó gyorsulásértékeket külön is megjelöltük.



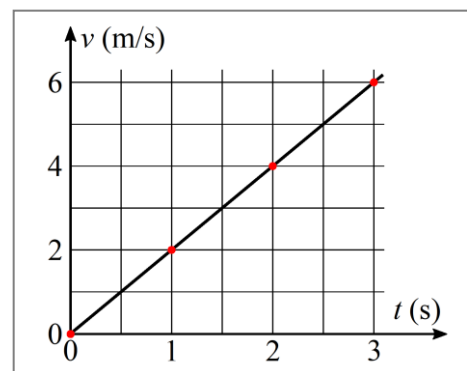
A test álló helyzetből indul, azaz $v_0 = 0$. Más időpontokban a sebesség a $v = a \cdot t$ összefüggés alapján számítható ki, ezért a sebesség–idő grafikon „függvénygörbéje” az origón átmenő egyenes. A fentiek alapján a 0, 1, 2 és 3 másodperchez tartozó sebességek:

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = a \cdot t_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = a \cdot t_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_3 = a \cdot t_3 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ s} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Ezeket az értékeket a sebesség–idő grafikonon külön is bejelöltük.

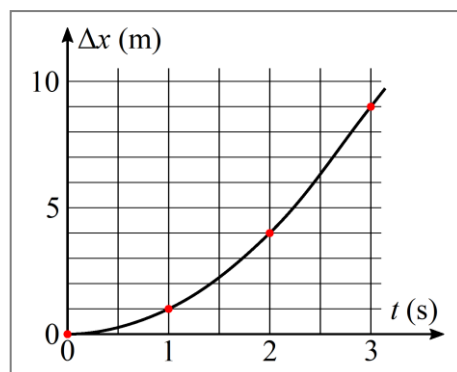
Az elmozdulás a $\Delta x = \frac{a}{2} \cdot t^2$ összefüggés alapján számítható ki. Az elmozdulás–idő grafikonon függvénygörbéje olyan parabola, amelynek tengelypontja az origóban van. A képlet alapján a 0, 1, 2 és 3 másodperchez tartozó elmozdulások:

$$\Delta x_0 = 0$$

$$\Delta x_1 = \frac{a}{2} \cdot t_1^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ s})^2 = 1 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = \frac{a}{2} \cdot t_2^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2 = 4 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = \frac{a}{2} \cdot t_3^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 \text{ s})^2 = 9 \text{ m}$$

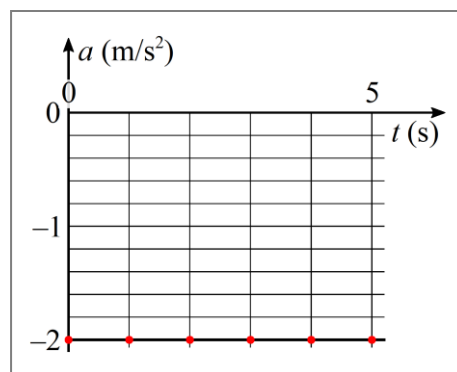


Ezeket az értékeket az elmozdulás–idő grafikonon külön is bejelöltük.

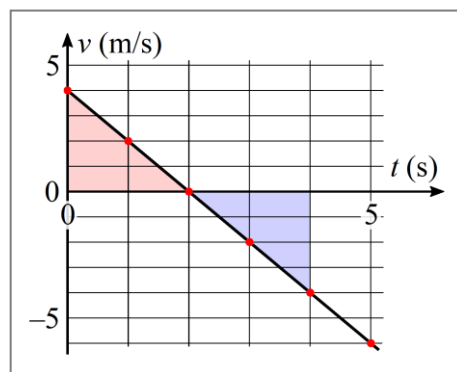
2. Egy test 4 m/s kezdősebességgel indulva egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végez. Gyorsulása 2 m/s² nagyságú és ellentétes a kezdősebesség irányával. Rajzoljuk meg a mozgás első öt másodperces szakaszához tartozó gyorsulás–idő, a sebesség–idő és az elmozdulás–idő grafikonokat!

Megoldás:

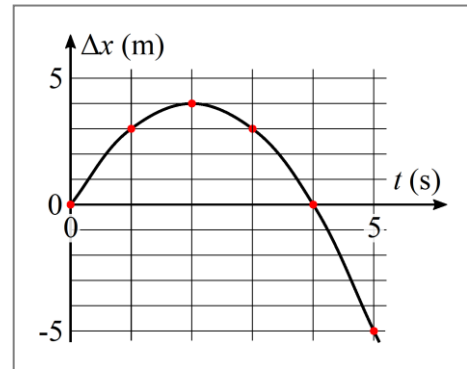
A gyorsulás állandó, de ellentétes irányú a sebességgel és így az X tengellyel is. Emiatt a gyorsulás minden pillanatban -2 m/s^2 , így a gyorsulás–idő grafikon függvénygörbéje a t tengellyel párhuzamos egyenes. A grafikonon a gyorsulás másodpercenkénti értékeit külön is megjelöltük.



A sebesség a $v = v_0 + a \cdot t$ összefüggés alapján határozható meg. Ennek megfelelően a sebesség–idő grafikon „függvénygörbéje” egy egyenes. Mivel az a gyorsulás negatív, a függvény szigorúan monoton csökkenő, és egy idő után a sebesség nullává, majd negatívvá válik. A grafikonon a sebesség másodpercenkénti értékeit külön is megjelöltük.



Az elmozdulás a $\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ képlet alapján számítható ki. Az elmozdulás- t grafikon függvénygörbéje egy olyan „lefelé nyitott” parabola, amelynek tengelypontja nem az origóban van. A grafikonon az elmozdulás másodpercenkénti értékeit külön is megjelöltük.



A grafikonok alapján a megállapítható:

- Az első 2 másodpercben a test sebessége egyre csökken, elmozdulása azonban folyamatosan növekszik, azaz a test távolodik a kiindulási helytől.
 - A $t = 2$ s időpontban a sebességfüggvénynek zérushelye, az elmozdulásfüggvénynek maximuma van. A test ekkor egy pillanatra megáll, de ekkor van legmesszebb a kiindulási helytől (ebben az irányban).
 - Ezután a sebesség nagysága folyamatosan nő, iránya azonban ettől kezdve végig ellentétes a kezdősebességgel. Az elmozdulás eközben fokozatosan csökken.
 - A $t = 4$ s időpontban a sebesség nagysága ugyanakkora, mind az induláskor. Az elmozdulás ebben a pillanatban éppen nulla.
 - Ezt követően a sebesség nagysága tovább növekszik, az elmozdulás nagysága is folyamatosan nő, de negatív értékeket vesz fel. (Az elmozdulás ezen a szakaszon ellentétes a kezdősebességgel és az X tengely irányával.)
3. Egy 600 m/s sebességű lövedék 36 cm mélyen fúródott be a fába. Mekkora volt a gyorsulása és mennyi idő alatt állt meg, ha egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végzett?

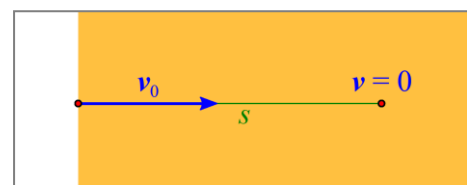
Megoldás:

$$v_0 = 600 \text{ m/s}$$

$$s = 36 \text{ cm} = 0,36 \text{ m}$$

$$a = ?$$

$$t = ?$$



A lövedék útjára vonatkozó összefüggésből a fában történő mozgás időtartama kifejezhető:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2 \cdot s}{v_0 + v}.$$

A lövedék megállt a fában, ezért $v = 0$. Ezt felhasználva a keresett időtartam:

$$t = \frac{2 \cdot s}{v_0 + v} = \frac{0,72 \text{ m}}{600 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,0012 \text{ s}.$$

A gyorsulás egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnál ugyanakkora, mint az átlaggyorsulás, ezért:

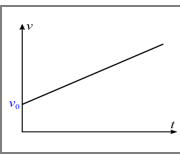
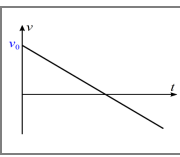
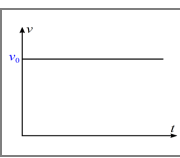
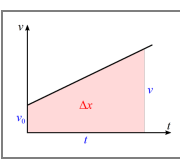
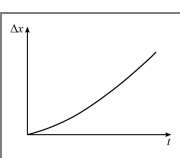
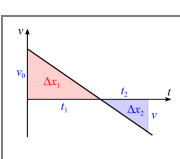
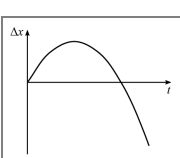
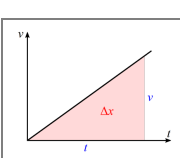
$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{t - 0} = -\frac{v_0}{t}.$$

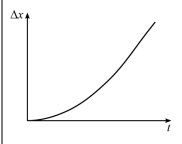
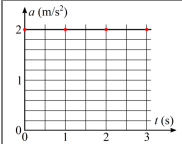
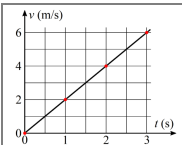
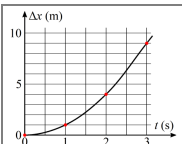
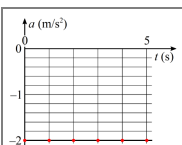
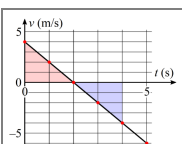
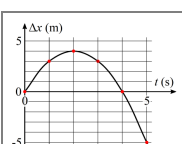
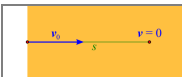
Az ismert adatokat behelyettesítve:

$$a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{600 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,0012 \text{ s}} = -500\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A lövedék 0,0012 másodperc alatt áll meg, gyorsulása pedig $500\,000 \text{ m/s}^2$ nagyságú és a kezdősebességgel ellentétes irányú.

Képek jegyzéke

| | |
|---|--|
|  | <p>Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $v(t)$ grafikonja ($a > 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0055.svg</p> |
|  | <p>Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $v(t)$ grafikonja ($a < 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0056.svg</p> |
|  | <p>Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $v(t)$ grafikonja ($a = 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0057.svg</p> |
|  | <p>Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás elmozdulása ($a > 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0058.svg</p> |
|  | <p>Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $\Delta x(t)$ grafikonja ($a > 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0059.svg</p> |
|  | <p>Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás elmozdulása ($a < 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0060.svg</p> |
|  | <p>Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $\Delta x(t)$ grafikonja ($a < 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0061.svg</p> |
|  | <p>Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás elmozdulása ($v_0 = 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0062.svg</p> |

| | |
|---|---|
|  | <p>Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $\Delta x(t)$ grafikonja ($v_0 = 0$) © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0063.svg</p> |
|  | <p>Gyorsulás–idő grafikon az 1. példához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0064.svg</p> |
|  | <p>Sebesség–idő grafikon az 1. példához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0065.svg</p> |
|  | <p>Elmozdulás–idő grafikon az 1. példához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0066.svg</p> |
|  | <p>Gyorsulás–idő grafikon a 2. példához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0067.svg</p> |
|  | <p>Sebesség–idő grafikon a 2. példához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0068.svg</p> |
|  | <p>Elmozdulás–idő grafikon a 2. példához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0069.svg</p> |
|  | <p>Rajz a 3. példához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0070.svg</p> |

Jelmagyarázat:

© **Jogvéde**tt anyag, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A **Wikimedia Commons**-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.

| | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|----------------|---|
|  | <i>Tartalom</i> | <i>Fogalmak</i> | <i>Törvények</i> | <i>Képletek</i> | <i>Lexikon</i> |  |
|---|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|----------------|---|